70+.3rの法則 (理論計算機科学の深化 : 新たな計算世界観を求めて)

伊藤, 暁

数理解析研究所講究録
第 1599 巻 2008 年 24-26

70 + .3r の法則
Rule of 70 + .3r

山口大学　伊藤 暁
Akira Ito, Yamaguchi University

1. あらまし

表題の法則とは，複利貯金の元金が 2 倍になるまでの期間 y とその利率 $r\% \triangleq 100\,\alpha$ に関する近似式 $ry \fallingdotseq 72$, いわゆる“７２の法則”[1, 2] を若干修正したものである：

$$(1+\alpha)^y \;=\; 2 \;\iff\; \alpha y \;\fallingdotseq\; .7 + .3\,\alpha$$

α が与えられたときの y の近似値，y が与えられたときの α の近似値をそれぞれ $\tilde{y}$, $\tilde{\alpha}$ とすると，上記の近似関係は

$$\begin{array}{rclcrcl} y &=& \frac{\ln 2}{\ln(1+\alpha)} &\iff& \tilde{y} &=& .7/\alpha + .3 \\ \alpha &=& 2^{1/y} - 1 &\iff& \tilde{\alpha} &=& .7/(y-.3) \end{array}$$

と書き換えられる．

図 1 に提案公式による近似の相対誤差 $\frac{\tilde{y}-y}{\tilde{y}} \triangleq \delta_{\tilde{y}}$, $\frac{\tilde{\alpha}-\alpha}{\tilde{\alpha}} \triangleq \delta_{\tilde{\alpha}}$（実線）ならびに７２公式：$= .72$（細い実線），3%毎の調整を加えた式：$= .693 + \alpha/3$（太い点線），E-M 公式：$= .693/(1-\alpha/2)$（太い破線），３次のパデ近似：$= .693(6+4\alpha)/(6+\alpha)$（太い実線）の相対誤差を示す [2].

図から分かるように，既存の近似公式の相対誤差は定義域 $(\underline{0 \le \alpha \le 1,\ y \ge 1})$ のいずれかで ±1% を超えるのに対し，本公式は全域で ±1% 内に抑えられている $(\lim_{y\to\infty} \delta_{\tilde{\alpha}} = \lim_{\alpha\to 0} \delta_{\tilde{y}})$．この誤差保障により，任意の対数関数・指数関数 [3] が数回の四則演算で精度良く求められる．

2. 適用例

例 2.1 増加率が年 1.33%のとき，現在の人口が 2 倍になるまでの年数 y：$(1+.0133)^y = 2 \Leftrightarrow \tilde{y} = .7/.0133 + .3 = 52.9315$ [$= 52.4621\cdots$]. 以下，鉤括弧内 [ ] の数値は真値．

例 2.2 (対数定数) (i) $a = \log_2 3 \Leftrightarrow 3 = 2^a \Leftrightarrow 3/2 = 2^{a-1} \Leftrightarrow (1+1/2)^{1/(a-1)} = 2 \Leftrightarrow \widetilde{(a-1)^{-1}} = .7/(1/2) + .3 = 1.7 \Leftrightarrow \tilde{a} = (1.7)^{-1} + 1 = \underline{1.588235}$ [$= 1.584962\cdots$]. (ii) $a = \log_2 5 \Leftrightarrow 5 = 2^a \Leftrightarrow 5/4 = 2^{a-2} \Leftrightarrow (1+1/4)^{1/(a-2)} = 2 \Leftrightarrow \widetilde{(a-2)^{-1}} = .7/(1/4) + .3 = 3.1 \Leftrightarrow \tilde{a} = (3.1)^{-1} + 2 = 2.32258$ [$= 2.321928\cdots$]. (iii) $a = \log_2 10 = \log_2 5 + 1$. (iv) $\phi \triangleq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ [$= 1.618033\cdots$] とおくと，$a = \log_2\phi \Leftrightarrow 2^a = \phi \Leftrightarrow \phi^{1/a} = (1+(\phi-1))^{1/a} = 2 \Leftrightarrow \widetilde{1/a} = .7/(\phi-1) + .3 = 1.4326256 \Leftrightarrow \tilde{a} = 0.698019$ [$= 0.694241\cdots$].

例 2.3 (金融) (i) 年利 11.5%の複利貯金が 3 倍になるまでの年数 y：$(1+0.115)^y = 3 = 2^{\log_2 3} \Leftrightarrow (1.115)^{y/\log_2 3} = 2 \Leftrightarrow \widetilde{y/\log_2 3} = .7/.115 + .3 = 6.387 \Leftrightarrow \tilde{y} = 1.585 \times 6.387 = 10.123$ [$= 10.09249\cdots$] (ii)「トサン」で借りた 1 円の 10 年後の金額 10^b：$10^b = (1+0.3)^{3650/10} \Leftrightarrow (1.3)^{365} = 2^{b\log_2 10} \Leftrightarrow (1.3)^{365/(b\log_2 10)} = 2 \Leftrightarrow \widetilde{365/(b\log_2 10)} = .7/.3 + .3 = 2.6333 \Leftrightarrow \tilde{b} = 365/(2.6333 \times \log_2 10) = 138.609/\log_2 10 = 41.72557$ [$= 41.58932\cdots$].

例 2.4 (物理) (i) 絶対温度 T の理想気体を倍の体積に断熱可逆膨張したときの温度 T' : $T'/T = (\frac{1}{2})^{0.7} \Leftrightarrow a \stackrel{\triangle}{=} T/T' = 2^{0.7} \Leftrightarrow a^{1/0.7} = (1+(a-1))^{1/0.7} = 2 \Leftrightarrow \widetilde{a-1} = .7/(.7^{-1} - .3) = 0.620253 \Leftrightarrow \widetilde{T'} = T/1.620253 = 0.617187 \times T$ [$= 0.6155722 \cdots \times T$]. (ii) 半減期 45 億年のウラン 238 が 1 年間に減少する率 α: $(1-\alpha)^{4500000000} = 2^{-1} \Leftrightarrow (1-\alpha)^{-1\times 4500000000} = 2 \Leftrightarrow (1+\frac{\alpha}{1-\alpha})^{4500000000} = 2 \Leftrightarrow \widetilde{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \fallingdotseq \tilde{\alpha} = .7/(.45\times 10^{10} - .3) = 1.5556\times 10^{-10}$ [$= 1.540328 \cdots \times 10^{-10}$ $\because 2^x = 1 + x\ln 2 + O(x^2)$].

ちなみに，Google 検索の電卓機能で **2^(1/4500000000)** を求めると 1 が返る（単精度では不十分ということ）.

例 2.5 (数値計算) (i) $x\log_2 x = 1 \Leftrightarrow x^x \stackrel{\triangle}{=} (1+\alpha)^{(1+\alpha)} = 2 \Leftrightarrow \tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}+1) = .7 + .3\tilde{\alpha} \Leftrightarrow \tilde{\alpha}^2 + .7\tilde{\alpha} - .7 = 0 \Leftrightarrow \tilde{\alpha} = (-.7 + \sqrt{.7^2 + 4\times .7})/2 = 0.556917 \Leftrightarrow \tilde{x} = 1.556917$ [$= 1.55961 \cdots$ $\because$ ニュートン法による]. (ii) $a = \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = (1+(a-1))^2 = 2 \Leftrightarrow \widetilde{a-1} = .7/(2-.3) = .7/1.7 = 0.41176 \Leftrightarrow \tilde{a} = 1.41176$ [$= 1.414213 \cdots$].

上記の近似 $1 + 7/17$ は連分数近似 $1 + 70/169$ [$= 1.414201 \cdots$] に似ている.

例 2.6 (ネイピア数) (i) $\alpha y = \alpha \frac{\ln 2}{\ln(1+\alpha)} = \ln 2 + \frac{\ln 2}{2}\alpha + O(\alpha^2)$ ならびに $\alpha\tilde{y} = .7 + .3\alpha$ より，$\lim_{\alpha\to 0}\frac{y}{\tilde{y}} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha y}{\alpha\tilde{y}} = \frac{\ln 2}{0.7}$. 従って，$\delta \stackrel{\triangle}{=} \lim_{\alpha\to 0}\frac{\tilde{y}-y}{\tilde{y}} = 1 - \lim_{\alpha\to 0}\frac{y}{\tilde{y}} \fallingdotseq 0.01$ とおくと，$\ln 2 = (1-\delta)\times 0.7 \fallingdotseq 0.7 - 0.007 = 0.6930$ [$= 0.6931471 \cdots$]. (ii) $e = 2^{\log_2 e} = 2^{1/\ln 2} \Leftrightarrow e/2 = 2^{1/\ln 2 - 1} \Leftrightarrow (1 + (e/2-1))^{(1/\ln 2 - 1)^{-1}} = 2 \Leftrightarrow \widetilde{e/2-1} = .7/((1/\ln 2 - 1)^{-1} - .3) = 0.357345 \Leftrightarrow \tilde{e} = 2.71469$ [$= 2.718281 \cdots$].

注意 2.1 (i) α, y の値が定義域外の場合には $\pm 1\%$ の誤差限界が保障されない : $\ln 2 < 1$ であるから，上記の例で "$(1+(e-1))^{\ln 2} = 2 \Leftrightarrow \widetilde{e-1} = .7/(\ln 2 - .3) = 1.781170$" とは変形すべきでない. (ii) 自乗演算によって誤差が拡大してしまう変形 : $\sqrt{e} = 2^{1/(2\ln 2)} \Leftrightarrow (1 + (\sqrt{e}-1))^{2\ln 2} = 2 \Leftrightarrow \widetilde{\sqrt{e}-1} = .7/(2\ln 2 - .3) = 0.644392 \Leftrightarrow \tilde{e} = (1.644392)^2 = 2.7040$.

3、 三角関数への拡張

指数関数近似式を複素関数化（ならびに定数 $\ln 2$ を 0.7 で置換）することにより，正弦関数の近似式 $\widetilde{\sin(\beta)} = \frac{(.7)^2\beta}{(.7)^2 + (.3\beta)^2}$ が得られる. 精度は $0 \leq \beta \leq 1$ の範囲で $\pm 0.5\%$ である. 余弦関数については倍角公式 $\cos(\beta) = 1 - 2\sin^2(\beta/2)$ を用いることで，$0 \leq \beta \leq 1$ の範囲で精度 $+0.5\%$ が保たれる. 上記以外の範囲では，余角関係 $\sin(\beta) = \cos(\frac{\pi}{2} - \beta)$ を用いて互いに還元 [4] すれば良い. 正弦近似式の逆関数は逆正弦の近似式 $\widetilde{\arcsin(s)} = \frac{(7 - \sqrt{7^2 - 4\times 3^2 s^2})\times 7}{2\times 3^2 s}$ になり，その精度は $0 < s \leq 0.8355 < \sin(1)$ [$= 0.8414 \cdots$] の範囲で $\pm 0.5\%$ である. 特に，$\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \pi/4$ より，$\tilde{\pi} = 3.15076$ [$= 3.14159 \cdots$] を得る.

文献

[1] ベントリー，珠玉のプログラミング，ピアソン・エデュケーション (2006).

[2] anonimous contributors, Rule of 72, `http://en.wikipedia/wiki/Rule_of_72` (Oct. 2007).

[3] 森敦，指数・対数のはなし，東京図書 (2007).

[4] 一松信，初等関数の数値計算，教育出版 (1974).

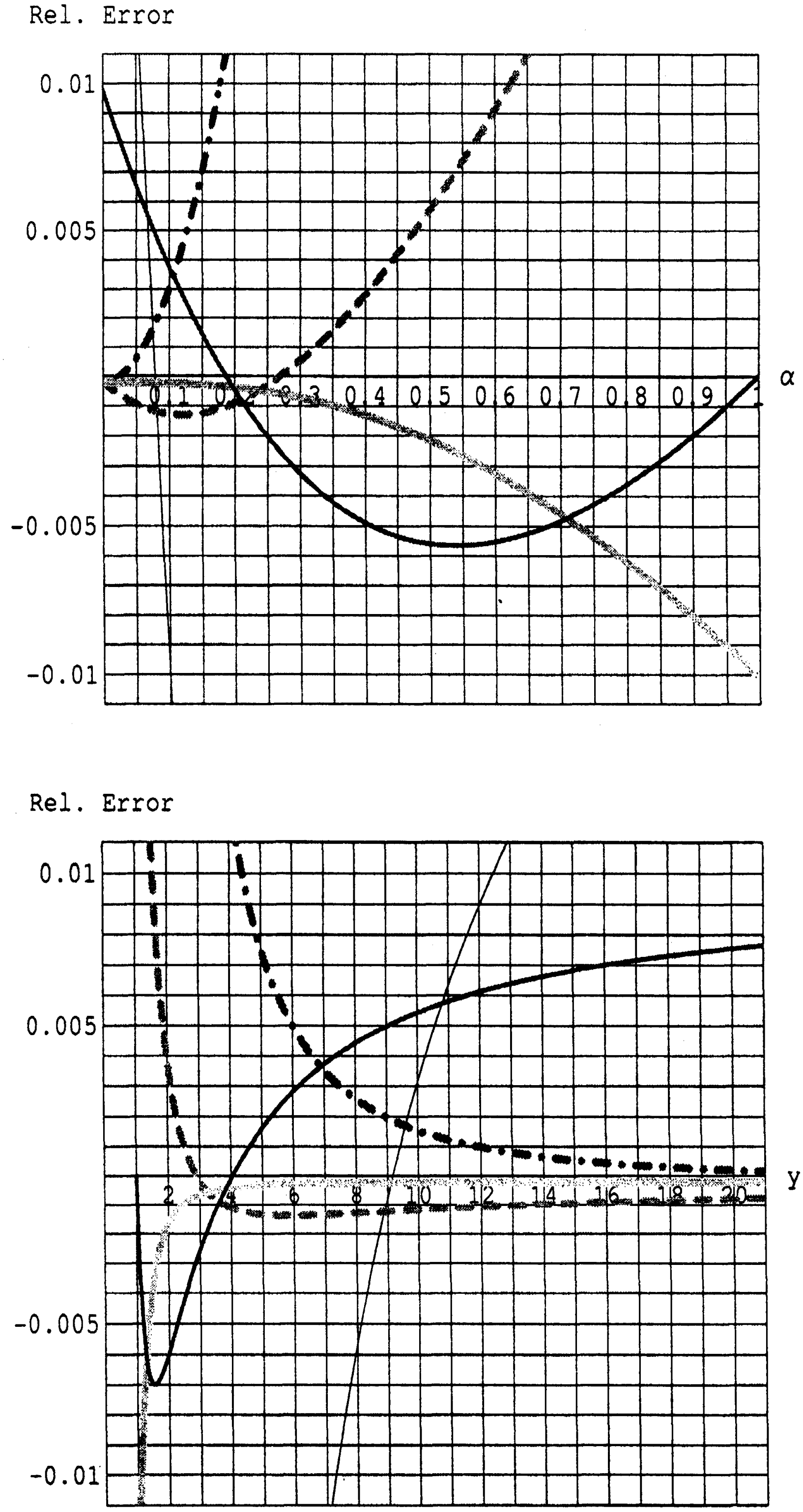

図 1. 近似値 $\tilde{y}$ ならびに $\tilde{\alpha}$ の相対誤差.